

Formulaire d'optique géométrique

Emmanuel Bigler, ENSMM - Besançon - bigler@ens2m.fr

Table des matières

I	Miroirs plans	2
II	Miroirs sphériques	2
III	Prisme	3
IV	Lame à faces parallèles	4
V	Dioptre sphérique	5
VI	Lentilles minces	6
	1) Convergentes :	6
	2) Formules algébriques générales	6
	3) Association de deux lentilles minces	7
VII	Focométrie	8
	1) Méthode de Cornu	8
	2) Méthode simplifiée pour les systèmes convergents.	9
VIII	Instruments visuels classiques	9
	1) Oeil	9
	2) Loupe	10
	3) Microscope	10
	4) Lunette astronomique	11
	5) Jumelles terrestres	11

Bibliographie

- Ouvrage récent : PÉREZ, Optique géométrique et ondulatoire, éditions Masson, ISBN 2-2258-1369-8
 - Ouvrage récent : DETTWILLER, « Les Instruments d'Optique : Étude théorique, expérimentale et pratique », éditions Ellipses (1997) ISBN 2-7298-5701-X
 - Ouvrage ancien, mais complet et qui a été ré-édité : MOUSSA/PONSONNET, Optique géométrique, éditions Casteilla (2000) ISBN 2-7135-1223-9
-

I Miroirs plans

A' est symétrique de A par rapport au plan du miroir

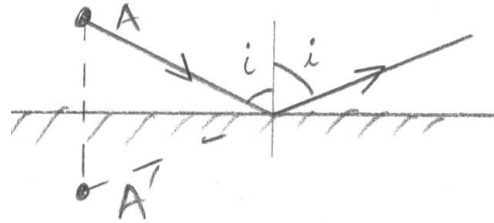


FIG. 1 – L'image dans un miroir plan est symétrique par rapport au plan

- nombre pair de miroirs = rotation + translation
- nombre impair de miroirs = symétrie + translation

II Miroirs sphériques

Formules paraxiales algébriques : p. ex. $\overline{CS} = -\overline{SC}$

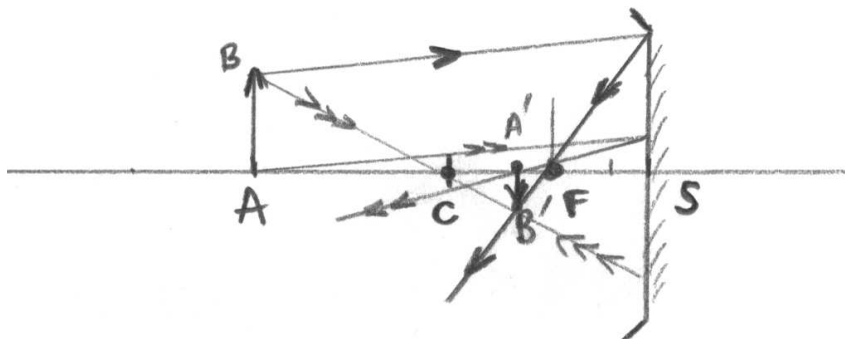


FIG. 2 – Miroir sphérique convergent, constructions paraxiales

$$\overline{CS} = R; \overline{SF} = f = \frac{\overline{SC}}{2}$$

formules avec origine au centre : $\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$

formules avec origine au sommet : $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$

grandissement $\gamma = -\frac{f}{FA} = -\frac{FA'}{f}$; $FA \times FA' = f^2$

III Prisme

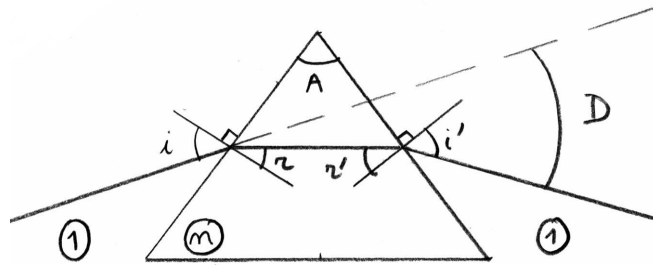


FIG. 3 – Déviation par un prisme, cas général

Angle au sommet A , indice n , déviation D . relations fondamentales :

$$\sin i = n \sin r ; \sin i' = n \sin r' ; r + r' = A ; D = i + i' - A$$

Il existe un minimum de déviation dans la configuration symétrique $i = i'$ et $r = r'$. Dans ce cas, on a

$$i = \frac{D_m + A}{2} ; r = \frac{A}{2}$$

on en déduit l'indice du prisme, ce qui permet des mesures :

$$n = \frac{\sin \frac{D_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Prisme d'angle faible :

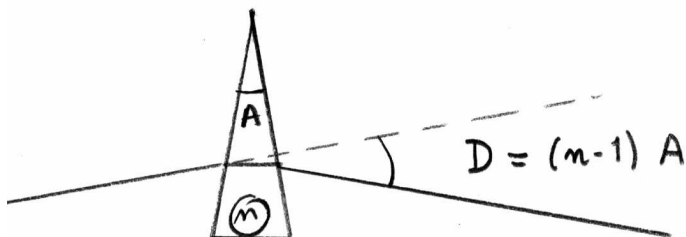


FIG. 4 – Déviation par un prisme d'angle faible

On a dans ce cas la relation approchée : $D = (n - 1)A$. Même si le prisme est d'angle faible, et *a fortiori* dans le cas général, un prisme n'est stigmatique que pour des rayons parallèles en entrée, autrement dit un point-source à l'infini. Un point source à distance finie donnera une image floue en sortie. De plus en éclairage polychromatique la dispersion des couleurs empire encore le phénomène.

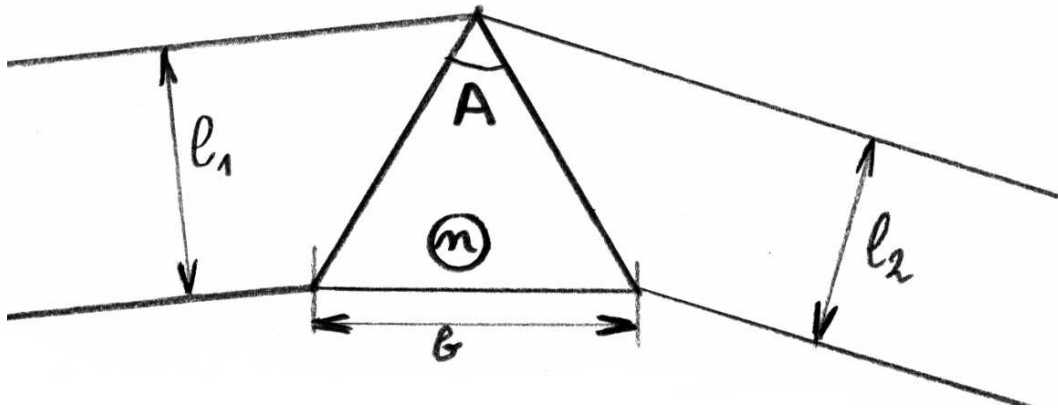


FIG. 5 – Relation entre la dispersion du prisme et sa géométrie

Dispersion : l'indice n dépend de la longueur d'onde λ , et donc D dépend de λ .

Sachant que $\frac{dn}{d\lambda}$ dépend du verre, on peut écrire

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn} \times \frac{dn}{d\lambda}$$

$\frac{dD}{dn}$ peut être calculé géométriquement et vaut $\frac{b}{l_2}$.

IV lame à faces parallèles

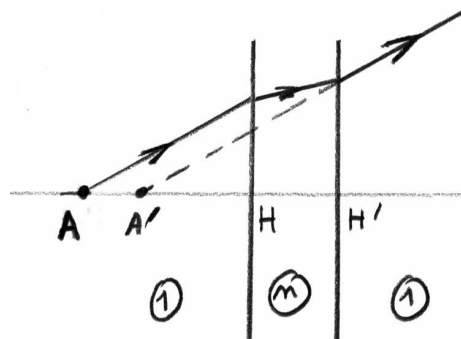


FIG. 6 – L'effet d'une lame à face parallèles est une translation constante entre l'objet et l'image

$$\overline{AA'} = \overline{HH'} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Exemple : air/verre : $n = \frac{3}{2}$; $\overline{AA'} \simeq \frac{1}{3} \overline{HH'}$

V Dioptre sphérique

Formule de Lagrange-Helmholtz :

$$n_1 \overline{A_1 B_1} \sin u_1 = n_2 \overline{A_2 B_2} \sin u_2$$

$$f_1 = \overline{S F_1} = \overline{S C} \frac{n_1}{n_1 - n_2} ; f_2 = \overline{S F_2} = \overline{S C} \frac{n_2}{n_2 - n_1}$$

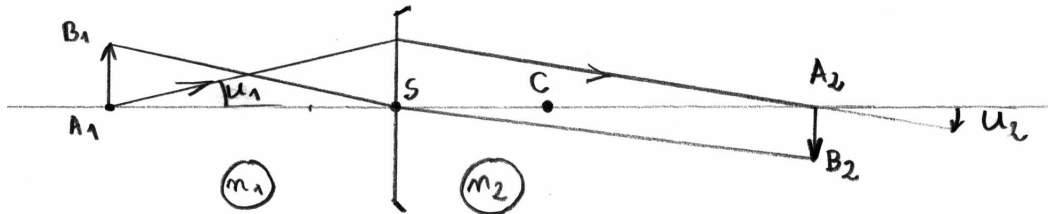


FIG. 7 – Constructions paraxiales objet-image dans un dioptre sphérique

Dans un dioptre sphérique :

- le rayon qui passe par le centre n'est pas dévié
- mais le rayon qui passe par le sommet est dévié ! (attention, ne pas confondre avec ce qui se passe dans une lentille mince)

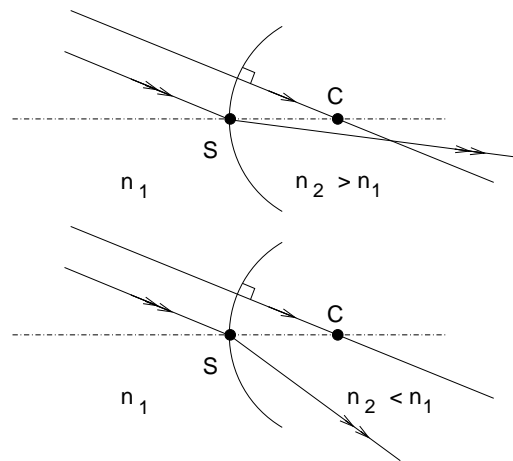


FIG. 8 – Tracé de rayons du dioptre sphérique suivant les indice des milieux

Formules avec origine au sommet :

$$\frac{n_1}{\overline{S A_1}} - \frac{n_2}{\overline{S A_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{S C}}$$

Formules avec origine au centre (noter le *croisement d'indices* par rapport au cas précédent) :

$$\frac{n_1}{\overline{C A_2}} - \frac{n_2}{\overline{C A_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{C S}}$$

VI Lentilles minces

1) Convergentes :

Formules de Descartes « arithmétique » (toutes grandeurs positives) pour les applications de type prise de vue photographique ou projection de diapositives ou de transparents avec objet réel A_1 et une image réelle A_2 :

$$d = A_1S ; d' = SA_2 ; f = FS = SF' ; \boxed{\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}}$$

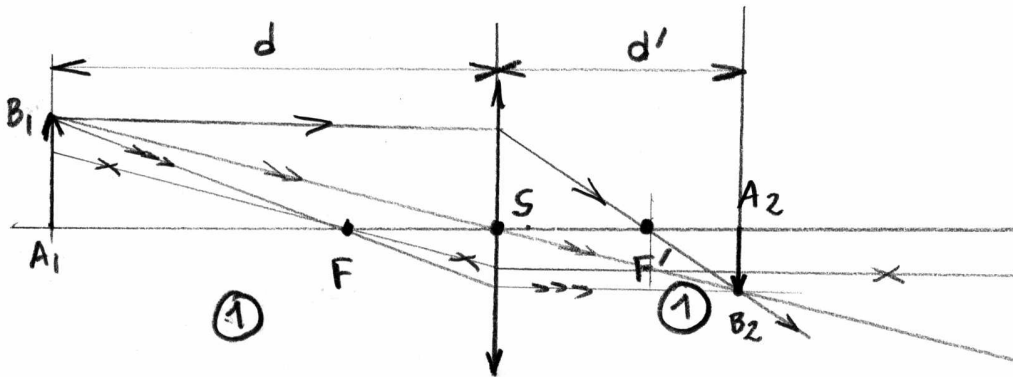


FIG. 9 – Construction de l'image d'un objet dans une lentille mince convergente

Pour que la conjugaison objet-image puisse se faire, on montre qu'une distance minimum objet-image est nécessaire :

$$\boxed{A_1A_2 \geq 4f}$$

Exemples : pour faire une projection avec une lentille convergente de 250 mm de focale ; il est impossible de « faire la netteté » s'il y a moins de 1m entre l'objet et l'écran. Pour un projecteur de diapositives 24×36 équipé d'une optique de focale 90 mm cette distance est ramenée à 360 mm. À la distance minimum $A_1A_2 = 4f$ on est au rapport 1 :1 qui a peu d'intérêt pour une projection (sauf pour un transport d'image avec renversement dans un instrument), mais ce qui correspond à la situation de macrophoto avec l'image aussi grande que l'objet. En prise de vue cette configuration dite « 2f-2f » correspond au rapport 1 :1 (image = objet) ce qui permet de photographier un timbre-poste plein cadre en 24×36. Par rapport à la prise de vue courante, objet à l'infini, il faudra donc rallonger la distance objectif-film d'une distance égale à la focale, à l'aide d'une ou plusieurs bagues-allonge ou d'un soufflet (voir plus bas « focométrie »).

2) Formules algébriques générales

Pour tout système centré, dans l'approximation de Gauss.

Formules de Descartes généralisées avec origines aux plans principaux H et H' ; s'il faut ne se souvenir que d'une seule formule algébrique, valable dans tous les cas (objets réels ou virtuels, lentilles convergentes ou divergentes, association de lentilles minces ou épaisses) c'est celle-ci :

$$\boxed{V' = V + C}$$

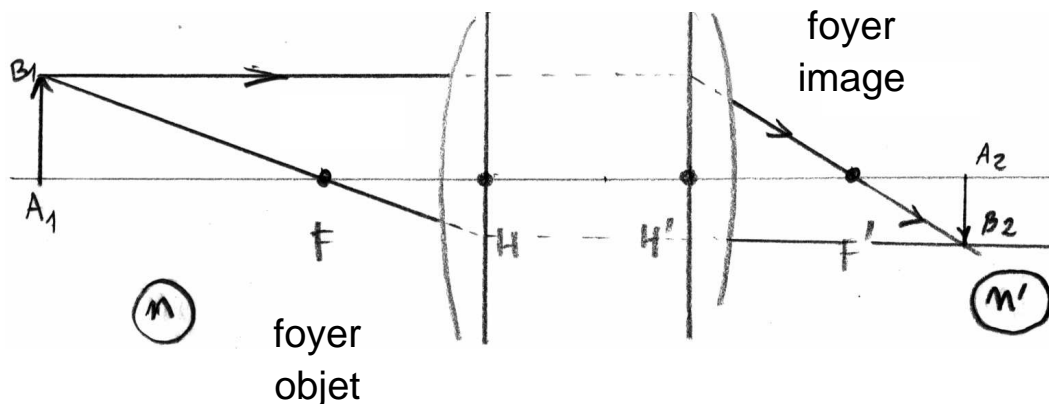


FIG. 10 – Foyers et plans principaux d'un système centré épais

où C désigne la *convergence* du système, avec :

$$V = \frac{n}{\overline{HA_1}}; V' = \frac{n'}{\overline{H'A_2}}; C = \frac{n'}{\overline{H'F'}}; \frac{\overline{HF}}{\overline{H'F'}} = -\frac{n}{n'}; f = \overline{HF}; f' = \overline{H'F'}$$

Les points principaux H et H' sont les points de l'axe optique situés dans les plans principaux. Les plans principaux sont des plans objet/image conjugués avec un grandissement égal à +1. On trouve les plans principaux en cherchant l'intersection d'un rayon parallèle à l'axe avec le rayon émergent correspondant (ceci détermine le plan principal image passant par H'), ou d'un rayon émergent parallèle à l'axe avec le rayon incident correspondant (ceci détermine le plan principal objet passant par H).

Grandissement :

$$\gamma = -\frac{\overline{HF}}{\overline{FA_1}} = -\frac{\overline{FA_2}}{\overline{H'F'}}$$

Formules de Newton généralisées :

$$\overline{FA_1} \times \overline{F'A_2} = \overline{HF} \times \overline{H'F'} = f \times f'$$

Points nodaux N et N' : les points nodaux d'un système optique sont deux points de l'axe optique, conjugués l'un de l'autre et pour lesquels les rayons correspondants croisant l'axe en ces points font le même angle (rapport de convergence des rayons égal à +1). Pour les systèmes optiques à milieux **d'entrée et de sortie identiques** (par exemple : dans l'air) **les points nodaux sont confondus avec les points principaux**, soit $N = H$, $N' = H'$.

Dans un tel système le plus courant, les distances focales objet et image sont égales et opposées soit : $\overline{HF} = -\overline{H'F'}$. Un système à milieux extrêmes identiques n'a donc qu'une seule distance focale, $f' = \overline{H'F'}$ qui est *positive* pour un système convergent et *negative* pour un système divergent.

3) Association de deux lentilles minces

Considérons l'association de deux lentilles dans des milieux extrêmes d'indices n_1 et n_2 , avec un milieu intermédiaire d'indice n .

Soit C_1 et C_2 les convergences de chacune des deux lentilles :

$$C_1 = -\frac{n_1}{S_1F_1} = \frac{n}{S_1F'_1}; C_2 = -\frac{n}{S_2F_2} = \frac{n_2}{S_2F'_2};$$

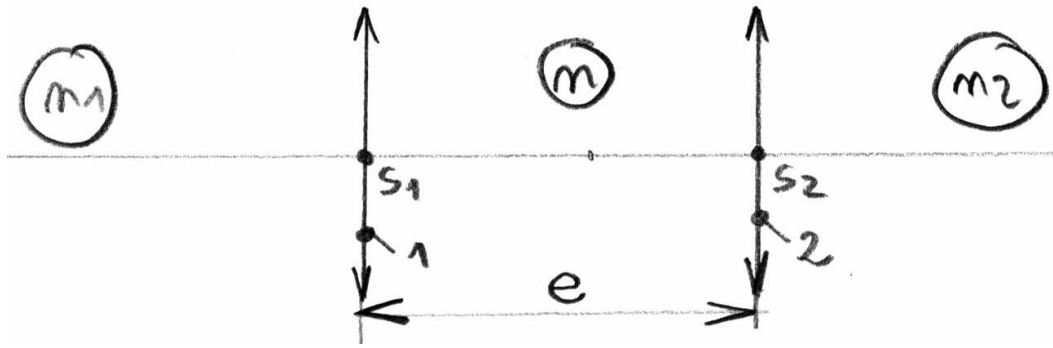


FIG. 11 – Association de deux lentilles minces pour former un système épais

La convergence C du système centré résultant s'écrit suivant la formule de Gullstrand :

$$C = \frac{n_2}{H'F'} ; \quad \boxed{C = C_1 + C_2 - \frac{e C_1 C_2}{n}}$$

Remarque : la position des plans principaux H et H' peut être *absolument quelconque* et sans rapport avec la position des centres des deux lentilles. *Cas particulier* : deux lentilles minces dans l'air avec $e = 0$ (lentilles accolées) $\Rightarrow C = C_1 + C_2$

VII Focométrie

1) Méthode de Cornu

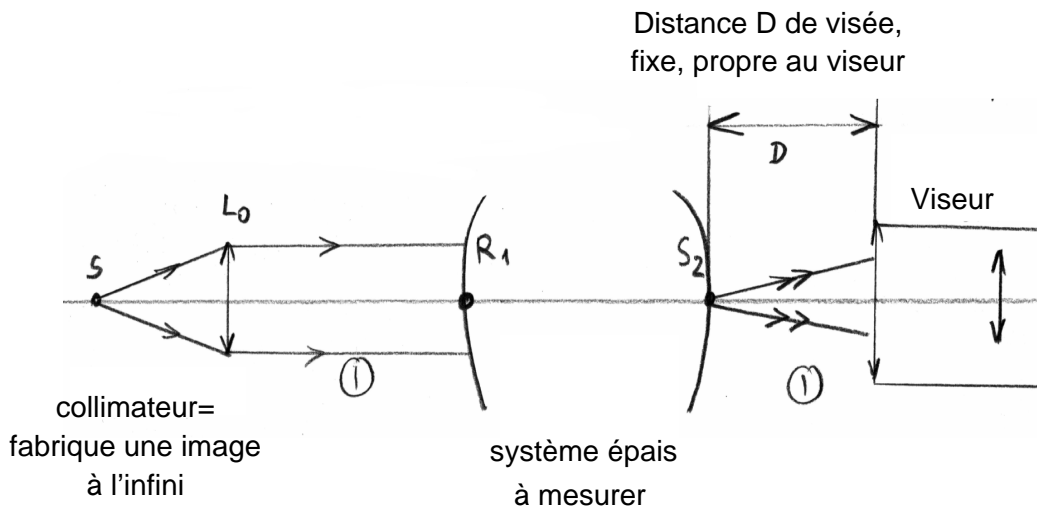


FIG. 12 – Détermination de éléments cardinaux d'un système épais par la méthode de Cornu

La source S est au foyer de la lentille L_0 . On forme ainsi un collimateur.

- Réglage du collimateur : par exemple par auto-collimation avec un miroir plan placé sur L_0 , renvoie la lumière vers S . Dans ce cas le collimateur sera réglé lorsque l'image de retour coïncide avec la source.
- Collimateur réglé : $S \rightarrow \infty \rightarrow$ donne alors à travers le système à mesurer une image F_2 , foyer-image du système.

- pointer S_2 la face de sortie
- pointer R_2 l'image de R_1 à travers le système
- On retourne le système : S donne F_1 le foyer-objet
- pointer R_1
- pointer S_1 l'image de S_2 à travers le système
- Calculer les grandeurs $\overline{F_2 S_2}$, $\overline{F_2 R_2}$, $\overline{F_1 R_1}$, $\overline{F_1 S_1}$
- Les formules de Newton donnent : $\overline{HF} \times \overline{H'F'} = -f'^2 = \overline{F_1 R_1} \times \overline{F_2 R_2} = \overline{F_1 S_1} \times \overline{F_2 S_2}$

2) Méthode simplifiée pour les systèmes convergents.

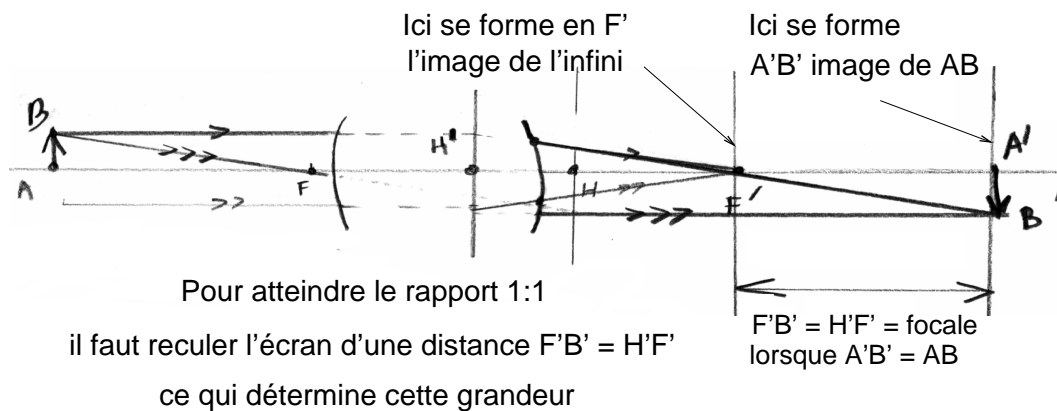


FIG. 13 – Détermination simplifiée de la focale d'un système épais convergent, méthode infini-foyer et rapport 1 : 1

Remarque : le dessin représente H derrière H' , c'est une situation parfaitement possible pour un système épais.

- collimateur + faisceau parallèle $\Rightarrow F'$ sur l'écran
- on règle la distance entre le système et l'écran pour que l'objet $AB \rightarrow$ image en $A'B'$ égale à AB mais *renversée* sur l'écran. ¹
- \Rightarrow on est alors en position « $2f-2f$ » $\Rightarrow \overline{F'A'} = \overline{H'F'} = f'$. (CQFD)
- Du recul de l'écran on déduit directement f' quelle que soit l'épaisseur du système ou sa complexité, et quelle que soit la position des plans principaux.

Cette méthode est typiquement applicable au cas des objectifs pour appareils photo.

VIII Instruments visuels classiques

1) Oeil

L'œil « normal » (ou « amétrope ») voit net sans accommoder à l'infini.

- Un œil myope voit net sans accommoder à des distances typiques de l'ordre de $D = 10$ cm (pour une correction de 10 dioptries, forte myopie) à 1 m (une dioptrie, faible myopie)
- Un œil hypermétrope doit faire un effort d'accommodation *même* pour voir à l'infini ; ceci entraîne *a fortiori* une fatigue visuelle pour la lecture ou l'écriture ($D = 30$ cm).

¹Rappel : ceci n'est possible que si la distance objet-image est plus grande que $4f'$ donc sur un système de focale f' inconnue il vaut mieux placer l'objet assez loin.

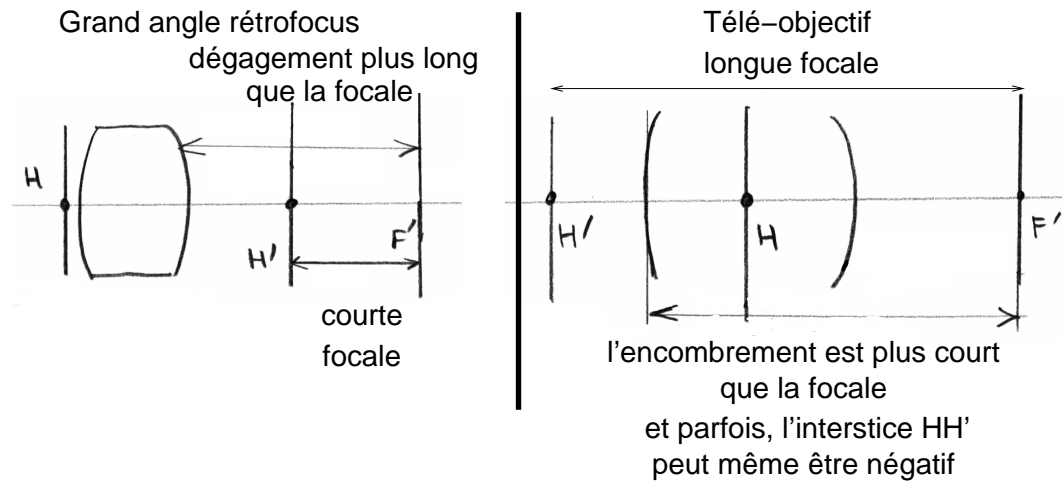


FIG. 14 – Grand angulaires rétrofocus et télé-objectifs photographiques

2) Loupe

L'objet est au foyer \Rightarrow l'image est renvoyée à l'infini.

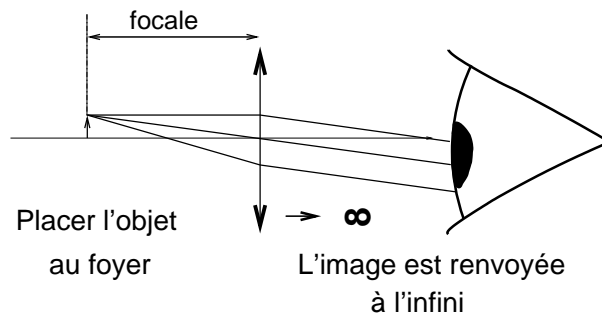


FIG. 15 – Loupe en réglage visuel classique foyer->infini

Le *grossissement* intrinsèque « commercial » de la loupe est défini par : $G_{ic} = \frac{1}{4f'}$, où f' est la focale en mètres.

Exemple d'inscription sur une monture de loupe « 8x » signifie : $G_{ic} = 8$; $f' \simeq 3,1$ cm.

3) Microscope

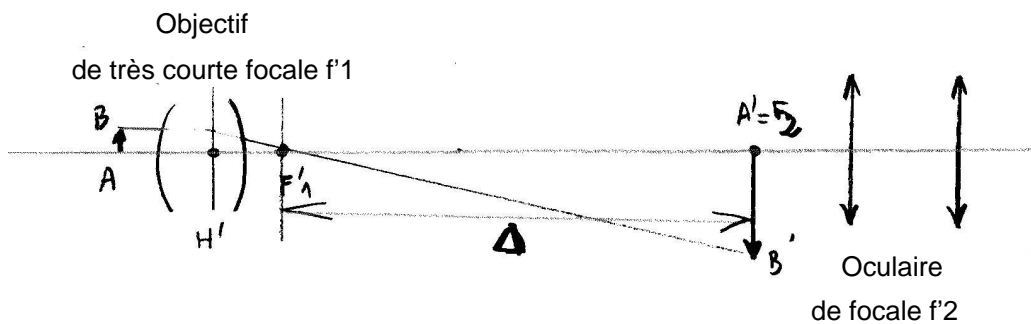


FIG. 16 – Principe du microscope

$A'B'$ est l'image agrandie de AB . L'objectif du microscope est un système centré de très forte convergence (très courte focale f'_1 , quelques mm). L'oculaire est un autre système convergent qui renvoie à l'infini l'image $A'B'$ donnée par l'objectif. Dans ces conditions on peut voir net sans accommoder. La distance $\Delta = F'_1 F_2 \simeq 18$ cm dans les microscopes classiques (ceux utilisés en biologie). On définit la *puissance* P du microscope par : $P \simeq \frac{\Delta}{f'_1 f'_2}$. Le grandissement γ (pour l'objectif) s'écrit $\gamma_{obj.} = \frac{\Delta}{f'_1}$. Le grossissement « commercial » du microscope s'écrit $G_{cm} = \gamma_{obj.} \times G_{ocul.}$. Les ordres de grandeur sont : G_{cm} de 25 à 2500, $\gamma_{obj.}$ de 5 à 120, et pour les oculaires $G_{ocul.}$ de 5 à 20.

4) Lunette astronomique

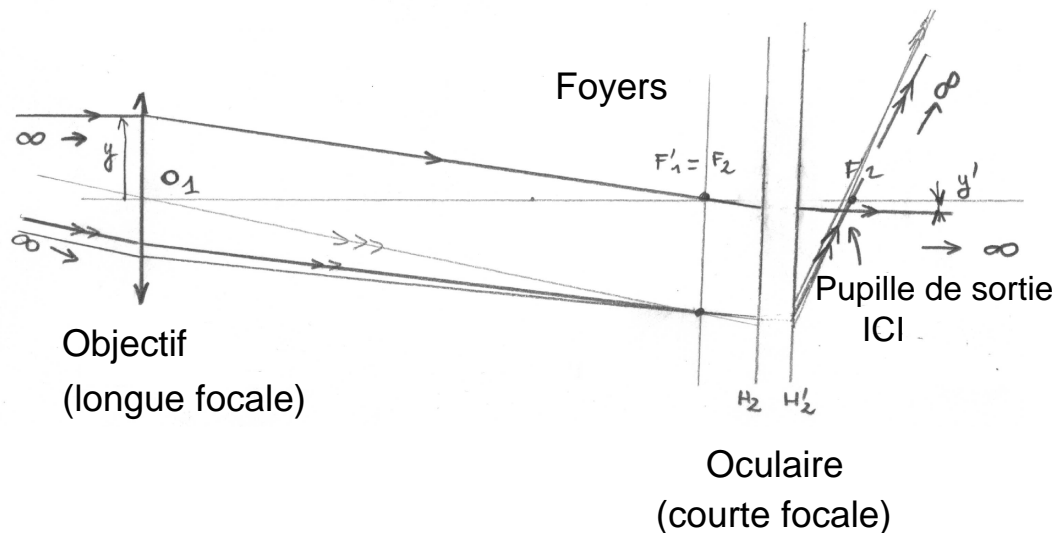


FIG. 17 – Principe de la lunette astronomique en réglage « afocal » et position de la pupille de sortie, là où il faut placer l'oeil

La lunette est dite réglée *afocale* ou $\infty - \infty$ si F'_1 et F_2 coïncident. Dans ce cas le grossissement angulaire G s'écrit :

$$G = \frac{\overline{O_1 F'_1}}{-\overline{F_2 H_2}} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

Pour un système centré afocal, le grandissement transversal γ est indépendant de la position de l'objet. Ce grandissement s'écrit :

$$\gamma = \frac{y'}{y} = \frac{1}{G} = -\frac{f'_2}{f'_1}$$

Exemples de valeurs : $f'_1=1$ m, $f'_2=2$ cm $\Rightarrow G=-50$ (signe - car l'image est renversée).

5) Jumelles terrestres

Une paire de jumelles est équivalente à deux lunettes astronomiques couplées, associées à des prismes redresseurs en vue de remettre l'image « dans le bon sens ». Signification des indications

commerciales : 8×20 signifie : 8 pour le grossissement angulaire (sans unité) et 20 pour le diamètre de l'objectif exprimé en mm. Au-delà de $G \simeq 10$ on ne gagne plus rien pour une utilisation à main levée à cause du flou de bougé.²

En divisant le diamètre de l'objectif (p.ex. 20 mm) par le grossissement (p.ex. 8) on obtient le diamètre de la « pupille de sortie » c.à.d le diamètre du faisceau lumineux juste en sortie de l'oculaire, soit 2,5 mm dans l'exemple choisi. Pour une utilisation des jumelles *de jour*, une pupille de sortie de 2,5 mm suffit. Avec des jumelles 8×50 , la pupille de sortie sera de 6,25 mm ce qui n'est utile que pour une utilisation *de nuit*. En effet le jour la pupille de l'œil ne dépasse pas un diamètre de 2,5 mm environ, c'est donc elle qui limite le diamètre du faisceau : inutile de payer fort cher une 8×50 dans ce cas. De nuit en revanche la pupille d'œil étant ouverte de 6 mm de diamètre au moins, on bénéficiera d'un effet 'd'entonnoir à lumière' très utile pour l'observation des étoiles³.

Annexe : Réglage des instruments pour éviter la fatigue visuelle

BUT : s'assurer que l'image observée est « loin devant » et non pas entre 1 et 20 cm... ce qui conduit à une accommodation forcée, d'autant plus gênante lorsque les deux yeux n'observent pas à la même distance, parce que l'instrument est dérégulé.

Pour tous les instruments binoculaires, il est primordial de régler correctement l'écart pupillaire, aucun opérateur n'étant fait de la même façon ! Les oculaires modernes à grand champ permettent de conserver les lunettes correctrices ; c'est important, en particulier pour la correction d'astigmatisme qui ne peut être obtenue que par les verres ophtalmiques. Une myopie ou une hypermétropie faibles, dépourvues d'astigmatisme seront par contre aisément compensées en retouchant le réglage de netteté central et la correction dioptrique de l'un ou l'autre oculaire (voir ci-dessous).

- Loupe binoculaire, microscope de faible puissance :

Déplacer l'ensemble objectif + oculaire pour l'éloigner de l'objet, puis rapprocher progressivement sans dépasser la mise au point optimale. Si on dépasse ce point, en très peu de déplacement du microscope l'image placée *a priori* à l'infini se rapproche en-deçà de 20cm, ce qui conduit à une accommodation forcée.

Inconvénient avec les microscopes de forte puissance, qui ont une très faible distance de visée frontale (1 mm ou moins) : avec cette méthode on risque d'abîmer l'objet ou de casser les lames couvre-objet (épaisseur : 0,18 mm) en s'approchant trop près. Dans les classes élémentaires les professeurs de sciences naturelles préconisent de mettre d'abord en contact avec l'objet ou la lame couvre-objet, puis d'éloigner progressivement le microscope. Cette deuxième méthode permet de diminuer la casse du matériel. Si on procède ainsi, il est alors préférable pour les yeux de dépasser le point de netteté et de « redescendre » pour reprendre la mise au point sans dépasser l'optimum. Dans tous ces réglages fins il est préférable de ne pas lâcher la vis pour pouvoir revenir facilement à une position de netteté qui passe souvent « fugitivement ».

- Jumelles, lunette astronomique :

Éloigner au maximum les oculaires des objectifs en jouant sur la vis de réglage centrale. Rapprocher progressivement sans dépasser la mise au point optimale. En général l'un des oculaires a un réglage supplémentaire destiné à compenser un éventuel écart dioptrique entre

² à l'exception notable de certains modèles récents équipés d'un système anti-bougé opto-mécanique inspiré de celui qui équipe certains télé-objectifs photo.

³ pour une discussion précise des gains éventuels de « luminosité » lorsqu'on compare l'observation à l'œil nu et l'observation à travers un instrument, voir les traités classiques. En effet le résultat n'est pas du tout intuitif.

les deux yeux ; dans ce cas faire le réglage comme précédemment sur le côté de l'oculaire fixe avec la vis centrale, puis régler l'oculaire ajustable « dans le bon sens » c'est à dire en éloignant puis en rapprochant (dévisser, puis revisser...) l'oculaire des objectifs.

– Jumelles « modernes » à mise au point interne :

Les jumelles modernes de qualité ont souvent une mise au point « interne ». Il est impossible de voir si les oculaires s'écartent ou se rapprochent des objectifs, puisqu'en fait la mise au point s'effectue par déplacement interne d'un groupe de lentilles.

Dans ce cas, il est préférable de procéder comme suit :

- Régler grossièrement la netteté sur un objet « proche » (5 à 10 m)
- Pointer les jumelles vers l'objet lointain recherché ; pour retrouver la netteté à partir de la mise au point précédente, on est alors obligé de déplacer le réglage « dans le bon sens » pour l'accommodation de l'œil. Là encore, ne pas dépasser le point de meilleure netteté.